

Leçon 144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications

[Ber] : *Algèbre, le grand combat*, Grégory Berhuy

[Cal-Per] : *Carnet de voyage en Algèbre*, Phillipe Caldero, Marie Peronniere

[Gou] : *Algèbre et probabilité*, Xavier Gourdon

[Goz] : *Théorie de galois*, Ivan Gozard

[Man-Mne] : *Réduction des endomorphismes*, Roger Mansuy, Rached Mneimné

[Rom] : *Mathématiques pour l'agrégation*, Jean-Étienne Rombaldi

[Ser] : *Matrices, theory and applications*, Jean-Pierre Serre

[Szp] : *Mathématiques Algèbre L3*, Aviva Szpirglas

I Partie A - Des racines (et des ailes) [Gou] [Rom]

I.1 Définitions

■ **Déf 1 (Racine) :**

■ **Ex 2 :** Exemple simple

■ **Prop 3 :** α est racine de P si et seulement si $X - \alpha$ divise P .

■ **Déf 4 (Multiplicité algébrique) :**

■ **Ex 5 :** Racines de l'unité dans $\mathbb{C}$.

■ **Thm 6 (Produit et multiplicité) :**

■ **Ex 7 :** Corps finis et Frobenius.

■ **App 8 (Nombre de racines) :**

■ **App 9 (Injectivité des fonctions polynomiales) :**

I.2 Polynômes scindés, irréductibles

■ **Déf 10 (Polynôme scindé) :**

■ **Déf 11 (Corps algébriquement clos) :**

■ **Ex 12 :** Un corps fini n'est pas algébriquement clos.

■ **Thm 13 (D'Alembert-Gauss) :**

■ **Déf 14 (Irréductible) :**

■ **Thm 15 (Irréductibles des polynômes réels) :**

■ **Prop 16 (Irréductibilité pour les petits degrés) :**

II Partie B - Polynômes symétriques [Ulm]

II.1 Définition [Szp] [Goz] [Ber]

■ **Déf 17 (Action de $\mathfrak{S}_n$) :**

■ **Déf 18 (Polynôme symétrique) :**

■ **Ex 19 :** Exemples dans le [Ber].

■ **Déf 20 (Polynôme symétrique) :**

■ **Ex 21 :** σ_1, σ_n .

■ **Déf 22 (Poids d'un monôme) :**

■ **Ex 23 :** Exemple parmi les polynômes élémentaires ou autre.

■ **Thm 24 (Théorème de structure) :**

■ **Ex 25 :** Exemples dans le [Ber]

II.2 Utilisation des polynômes symétriques [Cal-Per] [Man-Mne]

■ **Thm 26 (Relation coefficients-racines) :**

■ **Dév 27 (Kronecker) :**

■ **Ex 28 (Calculs de sommes) :** Voir [Szp].

III Partie C - Adjonction de racines [Gou] [Ber] [Szp]

III.1 Corps de rupture

■ **Déf 29 (Corps de rupture) :**

■ **Ex 30 :** Voir [Ber]

■ **Ex 31 :** Construction de $\mathbb{F}_4$. [Annexe : Tables d'opérations].

Thm 32 (Existence et unicité du corps de rupture) :

App 33 : Si $P \in K[X]$, il existe une extension dans laquelle P possède une racine.

III.2 Corps de décompositions

Déf 34 (Corps de décomposition) :

Ex 35 : Voir [Szp].

Contre-Ex 36 : Voir [Szp].

Thm 37 (Existence et unicité du corps de décomposition) :

App 38 (Existence et unicité des corps finis) :

III.3 Clôture algébrique

Déf 39 (Clôture algébrique) :

Ex 40 : Clôture de $\mathbb{Q}$, de $\mathbb{R}$.

Thm 41 (Steinitz) :

IV Partie D - Réduire [Rom] [Man-Mne]

Déf 42 (Polynôme caractéristique, minimal) :

Ex 43 : Voir [Rom].

Déf 44 (Matrice compagnon) :

Ex 45 : Bloc de Jordan.

App 46 : On peut appliquer des techniques de recherche de valeurs propres pour trouver des racines.

Prop 47 (Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon) :

Prop 48 : Les valeurs propres sont les racines du polynôme minimal

Thm 49 (Critère de diagonalisabilité) :

App 50 : Projecteurs, symétries, autres.

V Partie E - Mais où sont-elles ? [Gou] [Ser] [Rom] [Cal-Per]

V.1 Localisation élémentaire

Thm 51 (Rolle) :

Ex 52 : Polynômes de Tchebychev.

Prop 53 (Dichotomie) :

App 54 : Encadrement simple de $\sqrt{2}$.

Thm 55 (Gauss-Lucas) :

V.2 Localisation avancée

Thm 56 (Continuité des racines) :

 **Dév 57 (Disques de Gershgorin) :**

Ex 58 : Exemple numérique

App 59 : Matrices à diagonales strictement dominantes.

App 60 : Utilisation des disques pour la norme infinie sur une matrice compagnon.